APROBADO
Por Bernardo Cascales fecha 21:41 , 19/12/2011

FUNCIONES ESPECIALES

Título de la nota

Objetivos

- Extender la función factorial a $\mathbb{C}$: función Γ.
- Obtener distintas expresiones para la función Γ así como su relación con otras funciones clásicas.
- Introducir la función ζ de Riemann.

FINAL

Función Γ

Vamos a introducir la función Γ como una extensión a $\mathbb{C}$ de la función $n \longrightarrow (n-1)!$, $n \in \mathbb{N}$.

La introduciremos como una función que satisface la ecuación funcional
a) $f(z+1) = z f(z)$
b) $f(1) = 1$

que caracteriza a $n \longrightarrow (n-1)!$. Si suponemos que tal función es analítica en un entorno de 1, entonces f ha de tener polos simples en $\{-n+1 : n \in \mathbb{N}\} = \{0, -1, -2, \dots, -n, \dots\}$.

Efectivamente,

$$f(z+n) = (z+n-1) f(z+n-1) = \dots = (z+(n-1)) \cdots (z+1) \cdot z f(z),$$

con lo que si nos movemos en un entorno pequeño de $-(n-1)$ tenemos que para $0 < |z+(n-1)| < \varepsilon \equiv$

$$f(z) = \frac{f(1+(z+n-1))}{z(z+1)\cdots(z+n-2)(z+(n-1))}$$

y por tanto f tiene un polo simple en $-n+1$, pudiendo calcular el residuo por la fórmula

$$\mathrm{Res}(f,-n+1) = \lim_{z\to -n+1} \cancel{(z+n-1)} \frac{f(z+n)}{z(z+1)\cdots(z+n-2)\cancel{(z+n-1)}} =$$

$$= \frac{f(1)}{(-n+1)(-n+2)\cdots(-2)(-1)} = \frac{f(1)}{(-1)^{n-1}\cdot(n-1)!} = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}$$

Así pues, nos planteamos el problema de encontrar $f\in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ tal que f tenga polos simples en $\{0,-1,-2,\dots,\}$ satisfaciendo la ecuación funcional dada por las condiciones a) y b) de la página anterior. Para encontrar una tal f definimos

$$F(z) = z\cdot e^{g(z)}\cdot \prod_{n=1}^{\infty}(1+z/n)\,e^{-z/n}, \quad z\in\mathbb{C},$$

y a partir de ahí consideramos

$$[*] \quad f(z) := \frac{1}{F(z)} \qquad f\in\mathcal{M}(\mathbb{C}),\ P(f)=\{0,-1,-2,\dots\}$$

y obligamos a que f satisfaga la ecuación funcional a) + b).

✓ Si $F_m(z) = z\cdot e^{g(z)}\prod_{n=1}^{m}(1+z/n)\,e^{-z/n}$, entonces

$$\lim_m F_m(z) = F(z) \quad \text{para cada } z\in\mathbb{C}.$$

✓ $$f(z+1) = z f(z) \underset{z\in\mathbb{C}\setminus Z(F)}{\Longrightarrow} 1 = \frac{z f(z)}{f(z+1)} = \frac{z\cdot\frac{1}{F(z)}}{\frac{1}{F(z+1)}} = \frac{z\cdot F(z+1)}{F(z)} =$$

$$= \lim_m \frac{z\cdot(z+1)\,e^{g(z+1)}\prod_{n=1}^{m}\left(1+\frac{z+1}{n}\right)e^{-\frac{z+1}{n}}}{z\,e^{g(z)}\prod_{n=1}^{m}\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-z/n}} =$$

$$= \lim_m \frac{e^{g(z+1)}\ \cancel{z}\cdot\cancel{(z+1)}\,\cancel{\frac{z+2}{2}}\cdots\frac{z+m+1}{\cancel{m}}\ e^{-\sum_{n=1}^{m}1/n}\cdot \cancel{e^{-\sum_{n=1}^{m}z/n}}}{e^{g(z)}\ \cancel{z}\,\cancel{(z+1)}\,\cancel{\frac{z+2}{2}}\cdots\cancel{\frac{z+m}{m}}\ \cancel{e^{-\sum_{n=1}^{m}z/n}}} =$$

$$= \lim_m (z+m+1)\, e^{g(z+1)-g(z)-\sum_{n=1}^{m} 1/n} =$$

$$= \lim_m \frac{z+m+1}{m}\, e^{g(z+1)-g(z)+\left(\log m - \sum_{n=1}^{m} 1/n\right)} =$$

$$= 1 \cdot e^{g(z+1)-g(z)-\gamma} = e^{g(z+1)-g(z)-\gamma}$$

donde $\gamma = \lim_m \left(\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n} - \log m \right) = 0'577\ldots$

existe

Poniendo ahora

$(f(1)=1) \Leftrightarrow \quad 1 = F(1) = \lim_m F_m(1) = \lim_m e^{g(1)} \prod_{n=1}^{m} (1+1/n)\, e^{-1/n} =$

$$= e^{g(1)} \lim_m \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdots \frac{m+1}{m} \cdot e^{-\sum_{n=1}^{m} 1/n} = e^{g(1)} \lim_m \frac{m+1}{m}\, e^{\log m - \sum_{n=1}^{m} 1/n}$$

$$= e^{g(1)-\gamma}$$

Al final las condiciones que debe cumplir $\underline{\underline{g}}$ son

$$\begin{cases} 1 = e^{g(z+1)-g(z)-\gamma} & \text{para cada } z \in \mathbb{C}. \\ 1 = e^{g(1)-\gamma} \end{cases}$$

La función más sencilla que cumple las condiciones de arriba es $\quad g(z) = \gamma \cdot z \quad$ y consecuentemente definimos Γ como:

$$\Gamma(z) = \frac{1}{z \cdot e^{\gamma z} \cdot \prod_{n=1}^{\infty} (1+z/n)\, e^{-z/n}} = \frac{1}{z} \cdot e^{-\gamma z} \prod_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n+z} \cdot e^{z/n}$$

Tenemos la siguiente proposición.

Proposición

FINAL

La función dada por

$$\Gamma(z) := \frac{1}{z e^{\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty}(1+\frac{z}{n})e^{-\frac{z}{n}}} = \frac{1}{z} e^{-\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty}(1+\frac{z}{n})^{-1} e^{\frac{z}{n}},$$

es meromorfa en $\mathbb{C}$, tiene polos simples en $\{0,-1,-2,\dots\}$ siendo $\mathrm{Res}(\Gamma,-n) = \frac{(-1)^n}{n!}$, para $n = 0,-1,-2,\dots$ y satisface la ecuación funcional:

- $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$, para $z \in \mathbb{C} \setminus \{0,-1,-2,\dots\}$.
- $\Gamma(1) = 1$.

Podemos demostrar ahora las siguientes propiedades de la función Γ.

Proposición: Fórmula de Gauss

$$\Gamma(z) = \lim_n \frac{n!\,n^z}{z(z+1)\dots(z+n)},$$

para cada $z \in \mathbb{C} \setminus \{0,-1,-2,\dots\}$.

Demostración.-

$$\Gamma(z) = \frac{1}{z\, e^{\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty} (1+\frac{z}{n}) e^{-z/n}} = \lim_m \frac{1}{z} \cdot e^{-\gamma z} \prod_{n=1}^{m} \frac{n}{n+z} \cdot e^{z/n} =$$

$$= \lim_m \frac{1}{z} \cdot e^{-\gamma z} \frac{1}{z+1} \cdot \frac{2}{z+2} \cdots \frac{m}{z+m} \cdot e^{z \cdot \sum_{n=1}^{m} 1/n} =$$

$$= \lim_m \frac{m!\; e^{z\left(\sum_{n=1}^{m} 1/n - \gamma\right)}}{z(z+1)\cdots(z+m)} = \lim_m \frac{m!\; e^{z\left[\log m + \left(\sum_{n=1}^{m} 1/n - \log m\right) - \gamma\right]}}{z\cdot(z+1)\cdots(z+m)} =$$

$$= \lim_{m} \frac{m!\, m^{z} \cdot e^{z\left[\left(\sum_{n=1}^{m} 1/n - \log m\right)-\gamma\right]}}{z(z+1)\cdots(z+m)} =$$

$$\lim_{m} \frac{m!\, m^{z}}{z(z+1)\cdots(z+m)} \quad \#$$

Proposición: Fórmula de los complementos

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z},$$

para cada $z \in \mathbb{C} \setminus \{0,-1,-2,\dots\}$.

Demostración.-

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \Gamma(z)\Gamma(-z+1) = \Gamma(z)\cdot(-z)\cdot\Gamma(-z) =$$

$$= \frac{1}{z\, \cancel{e^{\gamma z}} \prod_{n=1}^{\infty}(1+z/n)e^{-z/n}} \cdot \frac{\cancel{(-z)}}{\cancel{(-z)}\, \cancel{e^{-\gamma z}} \prod_{n=1}^{\infty}(1-z/n)e^{+z/n}} =$$

$$= \frac{\pi \cdot 1}{\pi z \cdot \prod_{n=1}^{\infty}(1-z^2/n^2)} = \frac{\pi}{\operatorname{sen} \pi z} \quad \#$$

Nótese que a partir de aquí se obtiene que $\left(\Gamma(1/2)\right)^2 = \pi$ #

Vamos a demostrar ahora que la función Γ puede expresarse como una integral dependiente de un parámetro, que es la forma que habitualmente se utiliza para presentar la función Γ real de variable real.

Necesitamos para ello resolver primero el ejercicio que sigue.

Ejercicio

Pruébese que:

- La función $\varphi_1(z) := \int_1^{+\infty} e^{-t} t^{z-1}$ está definida para cada $z \in \mathbb{C}$ y que $\varphi_1 \in \mathscr{H}(\mathbb{C})$.
- La función $\varphi_2(z) := \int_0^1 e^{-t} t^{z-1}$ está definida para cada $z \in \mathbb{C}$, con $\operatorname{Re} z > 0$ y que $\varphi_2 \in \mathscr{H}(\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\})$.

Resolución.- se completará cuando estudiemos familias normales e integrales dependientes de un parámetro.

Proposición

Para $z \in \mathbb{C}$ con $\operatorname{Re} z > 0$ se tiene la igualdad

FINAL

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt. \quad (*)$$

Resolución.- Como $\Gamma \in \mathcal{H}(\{z : \operatorname{Re} z > 0\})$ y $\phi(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt$ también $\phi \in \mathcal{H}(\{z : \operatorname{Re} z > 0\})$, para probar la igualdad $(*)$ será suficiente ver, después del Principio de Identidad de funciones holomorfas que

$$\Gamma(x) = \phi(x) \quad (x \geq 1).$$

Hacemos la demostración en dos partes:

a) $\displaystyle\int_0^n (1 - t/n)^n t^{x-1} \longrightarrow \Gamma(x)$

b) $\displaystyle\int_0^n (1 - t/n)^n t^{x-1} \longrightarrow \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$

Observamos primero que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt < +\infty$.

Razonamos a) y b)

a) $$\int_0^n \left(1-\tfrac{t}{n}\right)^n t^{x-1} \underset{\substack{t=ns\\ dt=nds}}{\overset{t/n=s}{=}} \int_0^1 (1-s)^n (ns)^{x-1}\, n\, ds = n^x \int_0^1 (1-s)^n s^{x-1}\, ds =$$

$$\underset{dv=s^{x-1}ds}{\overset{u=(1-s)^n}{=}} n^x\left[\cancel{\left((1-s)^n\cdot \frac{s^x}{x}\right)_0^1}^{=0} + \frac{n}{x}\int_0^1 (1-s)^{n-1} s^x\, ds\right] =$$

$du=n(1-s)^{n-1}$
$v=s^x/x$

$$= n^x\,\frac{n}{x}\int_0^1 (1-s)^{n-1} s^x\, ds = n^x\,\frac{n}{x}\,\frac{(n-1)}{x+1}\cdots\frac{1}{x+n-1}\int_0^1 s^{x+n-1}\, ds =$$

$$= n^x\,\frac{n!}{x(x+1)\cdots(x+n)} \longrightarrow \Gamma(x) \quad \text{fórmula de Gauss.}$$

b) $$\left(1-\tfrac{t}{n}\right)^n \longrightarrow e^{-t}$$

$$f_n(t) = \left(1-\tfrac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\chi_{[0,n]} \longrightarrow e^{-t}\, t^{x-1}$$
en $[0,+\infty)$

como: $\left(1-\tfrac{t}{n}\right)^n \leq e^{-t}$, el T^{ma} Convergencia dominada acaba la prueba.

Si no queremos hacer uso del T^{ma} Convergencia Dominada,

$$0 \leq e^{-t} - \left(1-\tfrac{t}{n}\right)^n = e^{-t}\left(1 - e^{t}\left(1-\tfrac{t}{n}\right)^n\right) \leq$$

$0\leq t\leq n$ $\qquad\qquad$ $\left(1+\tfrac{t}{n}\right)^n \leq e^t$

$$\leq e^{-t}\left(1-\left(1+\tfrac{t}{n}\right)^n\left(1-\tfrac{t}{n}\right)^n\right) =$$

$$= e^{-t}\left(1-\left(1-\tfrac{t^2}{n^2}\right)^n\right) = e^{-t}\,\tfrac{t^2}{n^2}\cdot\left[1+\left(1-\tfrac{t^2}{n^2}\right)+\cdots+\left(1-\tfrac{t^2}{n^2}\right)^{n-1}\right]$$

$$\leq e^{-t^2}\cdot \tfrac{t^2}{n}$$

$$\left| \int_0^n e^{-t} t^{x-1} dt - \int_0^n (1 - t/n)^n t^{x-1} dt \right| \leq \int_0^n e^{-t} \frac{t^2 \cdot t^{x-1}}{n} dt \leq$$

$$\leq \frac{1}{n} \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x+1} dt \longrightarrow 0 \quad \#$$

Aspectos a estudiar para la función ζ

Aspectos a estudiar

- Definición de la función ζ.
- Factorización de Euler de la función ζ.
- Relación entre las funciones Γ y ζ: extensión de ζ a una función meromorfa en $\mathbb{C}$.
- Ecuación funcional Riemann: ceros triviales de la función ζ.
- La conjetura de Riemann.

Lo primero que hacemos es definir la función ζ como la suma de una serie

Definición

La función ζ de Riemann, se define en el semiplano $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \text{Re}\, z > 1\}$ mediante la suma de la serie

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} 1/n^z.$$

FINAL

Holomorfia — PROPOSICIÓN

La serie que define ζ converge uniformemente sobre cada compacto $K \subset \Omega$, y así, ζ es una función holomorfa en el semiplano $\{z \in \mathbb{C} : \text{Re}z > 1\}$.

FINAL

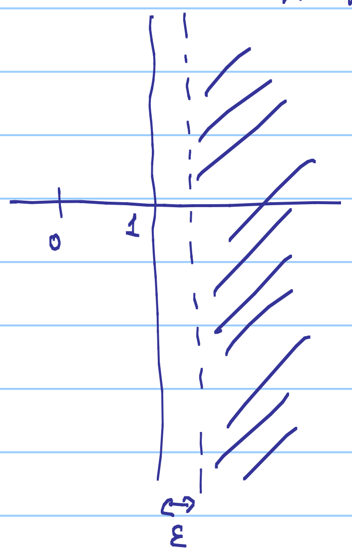
Demostración.-

Hemos de ver que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^z}$ converge uniformemente para $\text{Re}z>1$, habida cuenta que n^z es la determinación principal de n^z i.e.

$$n^z := e^{z \cdot \log n} \qquad \text{donde } \log n \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Así,

$$|n^z| = |e^{z \log n}| = e^{\text{Re}z \cdot \log n} = n^{\text{Re}z}$$



Para z tal que $\text{Re}\, z > 1+\varepsilon$ se tiene que $|n^z| = n^{\text{Re}z} > n^{1+\varepsilon} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left|\frac{1}{n^z}\right| \underset{\text{Re}z>1+\varepsilon}{\leq} \sum \frac{1}{n^{1+\varepsilon}} < +\infty$$

y en consecuencia, la serie converge uniformemente sobre $\{z : \text{Re}z > 1+\varepsilon\}$

y en particular en compactos de $\Omega = \{z : \text{Re}z>1\}$,

y así ζ es una función holomorfa en Ω. #

La función ζ es importante por su relevancia para estudiar la distribución de los nºs primos. La relación de ζ con la sucesión de los números primos queda de manifiesto en el siguiente resultado.

Proposición - Euler

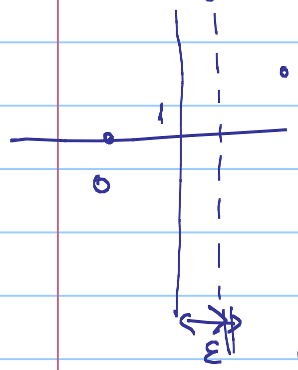
Si $(p_n)_n$ es la sucesión de los números primos $(2, 3, 5, 7, \ldots)$ y $\operatorname{Re} z > 1$, entonces se verifica que

$$\zeta(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 - p_n^{-z}},$$

FINAL

donde el producto converge uniformemente sobre cada compacto $K \subset \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 1\}$.

Demostración.- Veamos primero que el producto $\prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-p_n^{-z}}$ converge uniformemente sobre compactos de $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 1\}$



Fijamos $\varepsilon > 0$ y tomamos $\operatorname{Re} z > 1 + \varepsilon$

$$\left| 1 - \frac{1}{1 - p_n^{-z}} \right| = \left| 1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{p_n^z}} \right| = \left| 1 - \frac{p_n^z}{p_n^z - 1} \right| =$$

$$= \left| \frac{1}{p_n^z - 1} \right| \leq \frac{1}{p_n^{1+\varepsilon} - 1} \underset{n \geq 2}{\leq} \frac{1}{n^{1+\varepsilon} - 1} \quad (*)$$

$$|p_n^z| = p_n^{\operatorname{Re} z} > p_n^{1+\varepsilon} > 1 \iff |p_n^z - 1| \geq \big| |p_n^z| - 1 \big| \geq p_n^{1+\varepsilon} - 1 \geq n^{1+\varepsilon} - 1$$

Como $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^{1+\varepsilon} - 1} < +\infty$, $\overset{(*)}{\rightsquigarrow}$ $\prod_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1 - p_n^{-z}}$ converge unif. sobre compactos de Ω.

Así, la función $F(z) = \prod_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1 - p_n^{-z}}$ $z \in \Omega$, es holomorfa y para ver que $F = \zeta$ en Ω, es suficiente demostrar que $F(x) = \zeta(x)$ para $x > 1$, $x \in \mathbb{R}$.

Ahora bien, para $x > 1$

$$\frac{1}{1 - p_n^{-x}} = 1 + p_n^{-x} + p_n^{-2x} + \cdots + p_n^{-kx} + \cdots \quad n = 1, 2, \ldots$$

Así, se obtiene que

$$\prod_{n=1}^{m} \frac{1}{1-p_n^{-x}} = \sum_{k_1,k_2,\dots,k_m=0}^{+\infty} \left[p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_m^{k_m} \right]^{-x} = \sum_{n\in A_m} \frac{1}{n^x}$$

donde A_m es el conjunto de los números naturales que se factorizan exclusivamente utilizando los primos $p_1, p_2, \dots, p_m$.

Así, obtenemos las desigualdades:

$$\sum_{n=1}^{p_m} \frac{1}{n^x} \leq \prod_{n=1}^{m} \frac{1}{1-p_n^{-x}} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} = \zeta(x)$$

$$\Big\downarrow m\to+\infty \qquad\qquad \Big\downarrow m\to+\infty$$

$$\zeta(x) \qquad\qquad F(x)$$

y en consecuencia se tiene que $\zeta(x) = F(x)$ para $x > 1$, y por lo tanto $\zeta(z) = F(z)$ para cada $z \in \Omega$. #

A partir de aquí comentamos (sin demostración) como se puede extender la función ζ a una función meromorfa en $\mathbb{C}$, llegando a plantear la conjetura de Riemann.

El alumno se debe convencer de que el siguiente ejercicio es cierto.

Ejercicio (PRIMER PASO)

La integral $F(z) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{z-1}}{e^t-1} dt$ define una función holomorfa en el semiplano $\Omega = \{z : \mathrm{Re}\, z > 1\}$. En concreto:

i) La integral $F_0(z) = \int_0^1 \frac{t^{z-1}}{e^t-1} dt$ converge uniformemente sobre compactos en Ω y define una función holomorfa.

ii) La integral $F_1(z) = \int_1^{+\infty} \frac{t^{z-1}}{e^t-1} dt$ converge uniformemente sobre compactos de $\mathbb{C}$ donde define una función entera.

Resuelto el ejercicio anterior se demuestra la igualdad:

Proposición (SEGUNDO PASO)

Si $\mathrm{Re}\, z > 1$ se verifica

$$\Gamma(z)\zeta(z) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{z-1}}{e^t - 1} dt$$

Dem.- Conway - "Functions of one complex variable" 3.6 #

Como $\Gamma \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ podremos definir ζ como una función $\mathcal{M}(\mathbb{C})$ si somos capaces de definir la función $z \to \int_0^{+\infty} \frac{t^z}{e^t-1} dt$ a una función $\mathcal{M}(\mathbb{C})$. Esto se hace en el siguiente ejercicio.-

Ejercicio (TERCER PASO)

La función $F(z) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{z-1}}{e^t-1} dt$ definida y holomorfa en $\Omega = \{z : \mathrm{Re}\, z > 1\}$ se puede prolongar a una (única) función $\hat{F} \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ con polos simples en $\{1, 0, -1, -3, -5, \cdots -(2n+1), \dots\}$.

Resolución.- Consideremos las funciones

$$F_0(z) = \int_0^1 \frac{t^{z-1}}{e^t-1} dt \qquad F_1(z) = \int_1^{+\infty} \frac{t^{z-1}}{e^t-1} dt.$$

Como $F_0 \in \mathcal{H}(\Omega)$ y $F_1 \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$, es suficiente ver que F_0 puede extenderse a $\hat{F}_0 \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ con las propiedades requeridas.

Empezamos con la igualdad

$$\frac{1}{2}\frac{e^z+1}{e^z-1} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{2}{e^z-1}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{e^z-1}$$

La función $g(z) = \frac{1}{2}\frac{e^z+1}{e^z-1}$ es impar $\left(\frac{e^{-z}+1}{e^{-z}-1} = \frac{\frac{1+e^z}{e^z}}{\frac{1-e^z}{e^z}} = -\frac{e^z+1}{e^z-1} \right)$

Por otra parte $g(z)=\frac{1}{2}\frac{e^z+1}{e^z-1}$ tiene polos $\overbrace{\ldots,-2\pi,0,2\pi,\ldots}^{\text{simples}}$ con

$$\operatorname{Res}(g,0)=\lim_{z\to 0}\frac{1}{2}\cancel{z}\frac{e^z+1}{\cancel{z}(1+z/2!+\cdots)}=\frac{2}{2}=1.$$

Así en $D^*(0,2\pi)$ podemos escribir,

$$g(z)=\frac{1}{z}+\sum_{n=0}^{+\infty}a_n z^n$$

Observamos: ✓ $\sum_{n=1}^{+\infty}|a_n|<+\infty$ ya que la serie converge absolut. para $z=1$.

✓ $a_n=0$, para n par.

Por lo tanto $g(z)=\frac{1}{z}+\sum_{n=0}^{+\infty}a_{2n+1}z^{2n+1}$.

Por lo tanto tenemos,

$$\frac{1}{e^z-1}=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{e^z+1}{e^z-1}=\frac{1}{z}-\frac{1}{2}+\sum_{n=0}^{+\infty}a_{2n+1}z^{2n+1}$$

para $z\in D^*(0,2\pi)$.

Así, si $x>1$ y $0\le t<1$, entonces $|a_{2n+1}\cdot t^{x+2n}|\le|a_{2n+1}|$ y así

$$\frac{t^{x-1}}{e^t-1}=\frac{t^{x-1}}{t}-\frac{t^{x-1}}{2}+\sum_{n=0}^{+\infty}a_{2n+1}t^{2n+1}\cdot t^{x-1}$$

con convergencia uniforme sobre $[0,1]$. Por lo tanto

$$\int_0^1\frac{t^{x-1}}{e^t-1}=\int_0^1 t^{x-2}\,dt-\frac{1}{2}\int_0^1 t^{x-1}dt+\sum_{n=0}^{+\infty}a_{2n+1}\int_0^1 t^{x+2n}\,dt=$$

$$=\frac{1}{x-1}-\frac{1}{2x}+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a_{2n+1}}{x+(2n+1)}$$

La fórmula anterior sugiere definir

$$\hat{F}_0(z) := \frac{1}{z-1} - \frac{1}{2z} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_{2n+1}}{z+(2n+1)}$$

Esta serie se comprueba que converge en $\mathcal{M}(\mathbb{C})$ y claramente tiene polos simples en

$$\{1, 0, -1, -2, \ldots\}. \quad \#$$

Teorema (CUARTO PASO)

La función ζ se puede prolongar analíticamente a una función meromorfa en $\mathbb{C}$ con un único polo simple en $z=1$ y ceros en los puntos $\{-2n : n \in \mathbb{N}\}$ que satisface la *Ecuación Funcional de Riemann*

$$\zeta(z) = 2(2\pi)^{z-1}\Gamma(1-z)\zeta(1-z)\sin\frac{\pi z}{2}.$$

Demostración.- Tenemos

$$\Gamma(z)\cdot\zeta(z) = F(z) \quad \text{para } z \text{ con } \operatorname{Re} z > 1.$$

Si consideramos extensión a $\mathbb{C}$ tenemos

$$\Gamma(z)\cdot\zeta(z) = \hat{F}(z) \quad \text{con } \Gamma, \text{ y } \hat{F} \in \mathcal{M}(\mathbb{C}).$$

Despejamos ζ y obtenemos que

$$\zeta(z) = \frac{\hat{F}(z)}{\Gamma(z)}$$

donde $\hat{F}$ tiene polos simples en $1, 0, -1, -3, -5, \ldots$

Γ tiene polos simples en $0, -1, -2, -3, -4, \ldots$

$\rightarrow \zeta$ tiene polo en 1

tiene ceros en $-2, -4, -6, \ldots$

Para la ecuación funcional Conway: T^{ma} 3.6.3 #

Conjetura de Riemann

- Como consecuencia de la Ecuación Funcional de Riemann, la función ζ tiene ceros triviales en $\{-2,-4,-6,\dots\}$.
- La función ζ no tiene ceros en $\mathrm{Re}\, z > 1$ (utilizar la formula de Euler).
- El gran problema era/es estudiar los ceros de ζ en la banda crítica $B = \{z \in \mathbb{C} : 0 \leq \mathrm{Re}\, z \leq 1\}$.
- En 1859 Riemann afirmó que la función ζ tiene infinitos ceros en la banda B y que el número de ceros $N(T)$ en $B \cap \{z \in \mathbb{C} : 0 \leq \Im z \leq T\}$ verifica

$$N(T) = \frac{1}{2\pi} T \log T - \frac{1 + log 2\pi}{2\pi} T + O(\log T)$$

- Hadamard demostró la primera afirmación en 1959. Mangolet demostró la segunda en 1905.
- Riemann formuló la conjetura de que todos los ceros de ζ en la banda crítica están concentrados en la recta $\mathrm{Re}\, z = \frac{1}{2}$.
- Hardy demostró en 1915 que ζ tiene infinitos ceros en $\mathrm{Re}\, z = \frac{1}{2}$.
- En 1975 Levison demostró que $\mathrm{Re}\, z = \frac{1}{2}$ contiene asintóticamente más de 1/3 de los ceros que ζ tiene en la banda B.

1 PROBLEMA 1 MILLÓN: http://www.claymath.org/millennium/

- La conjetura de Riemann es uno de los problemas más famosos de las matemáticas que aún sigue abierto.
- WIKIPEDIA: The Riemann hypothesis is one of the most important open problems of contemporary mathematics; a $1,000,000 prize has been offered by the Clay Mathematics Institute for a proof. Most mathematicians believe the Riemann hypothesis to be true.

Los 7 problemas del millón

Clay Mathematics Institute

Dedicated to increasing and disseminating mathematical knowledge

HOME | ABOUT CMI | PROGRAMS | NEWS & EVENTS | AWARDS | SCHOLARS | PUBLICATIONS

Millennium Problems

In order to celebrate mathematics in the new millennium, The Clay Mathematics Institute of Cambridge, Massachusetts (CMI) has named seven *Prize Problems*. The Scientific Advisory Board of CMI selected these problems, focusing on important classic questions that have resisted solution over the years. The Board of Directors of CMI designated a $7 million prize fund for the solution to these problems, with $1 million allocated to each. During the Millennium Meeting held on May 24, 2000 at the Collège de France, Timothy Gowers presented a lecture entitled *The Importance of Mathematics*, aimed for the general public, while John Tate and Michael Atiyah spoke on the problems. The CMI invited specialists to formulate each problem.

One hundred years earlier, on August 8, 1900, David Hilbert delivered his famous lecture about open mathematical problems at the second International Congress of Mathematicians in Paris. This influenced our decision to announce the millennium problems as the central theme of a Paris meeting.

The rules for the award of the prize have the endorsement of the CMI Scientific Advisory Board and the approval of the Directors. The members of these boards have the responsibility to preserve the nature, the integrity, and the spirit of this prize.

Paris, May 24, 2000

Please send inquiries regarding the Millennium Prize Problems to prize.problems@claymath.org.

- Birch and Swinnerton-Dyer Conjecture
- Hodge Conjecture
- Navier-Stokes Equations
- P vs NP
- Poincaré Conjecture
- Riemann Hypothesis
- Yang-Mills Theory

- Rules
- Millennium Meeting Videos

Clay Mathematics Institute y la Conjetura de Riemann

Clay Mathematics Institute

Dedicated to increasing and disseminating mathematical knowledge

HOME | ABOUT CMI | PROGRAMS | NEWS & EVENTS | AWARDS | SCHOLARS | PUBLICATIONS

Riemann Hypothesis

Some numbers have the special property that they cannot be expressed as the product of two smaller numbers, e.g., 2, 3, 5, 7, etc. Such numbers are called *prime numbers*, and they play an important role, both in pure mathematics and its applications. The distribution of such prime numbers among all natural numbers does not follow any regular pattern, however the German mathematician G.F.B. Riemann (1826 - 1866) observed that the frequency of prime numbers is very closely related to the behavior of an elaborate function

$$\zeta(s) = 1 + 1/2^s + 1/3^s + 1/4^s + \dots$$

called the *Riemann Zeta function*. The Riemann hypothesis asserts that all *interesting* solutions of the equation

$$\zeta(s) = 0$$

lie on a certain vertical straight line. This has been checked for the first 1,500,000,000 solutions. A proof that it is true for every interesting solution would shed light on many of the mysteries surrounding the distribution of prime numbers.

- The Millennium Problems
- Official Problem Description — Enrico Bombieri
- Problems of the Millennium: The Riemann Hypothesis (2004) — Peter Sarnak
- Lecture by Jeff Vaaler at the University of Texas (video)
- Facsimile of Riemann's 1859 manuscript